Пусть функция *f* ограничена и имеет конечное число точек разрыва, тогда ее можно представить в виде

$$f(t) = f^c(t) + f^d(t),$$

где функции f^c и f^d – соответственно непрерывная и разрывная составляющие функции f, причем, разрывная составляющая f^d также будет иметь конечное число точек разрыва.

В следующих теоремах представлены достаточные условия единственности решений задачи (2).

Теорема 2. *Пусть функция f ограничена, имеет конечное число точек разрыва, в окрестностях которых она сохраняет знак, и функция f^c – непрерывная составляющая функции f является липшицевой функцией на отрезке T. Многозначная функция F получена из функции f методом простейшего выпуклого доопределения, функция L является непрерывной функцией ограниченной вариации. Тогда решение дифференциального включения* (2) *единственно*.

Теорема 3. *Пусть функция f ограничена, имеет конечное число точек разрыва и функция f^c – непрерывная составляющая функции f является липшицевой функцией на отрезке T. Многозначная функция F получена из функции f методом простейшего выпуклого доопределения. Функция L является монотонной и непрерывной, и x_0 не является точкой разрыва функции f. Тогда решение дифференциального включения* (2) *единственно*.

Замечание 1. Условие того, что x_0 не является точкой разрыва функции *f* в условиях теоремы 3 существенно для единственности решений задачи (2).

Литература

1. Ковальчук А.Н., Новохрост В.Г., Яблонский О.Л., Об аппроксимации дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами конечно-разностными уравнениями с осреднением // Известия ВУЗов. Математика. – 2005. – №3 – с.23-31.
2. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 223 с.

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ ИТЕРАТИВНОГО МЕТОДА

Савчук В.Ф., Голубцов И.А., БрГУ им. А.С.Пушкина, Брест

1.Постановка задачи

Решается операторное уравнение

$$Ax = y \tag{1}$$

с положительным ограниченным и самосопряженным оператором $A: H \to H$, в предположении, что нуль не является собственным значением оператора A. Причем $0 \in S_A$, то есть задача некорректна. Если решение уравнения (1) существует, то для его отыскания предлагается явный итеративный метод

$$x_{n+1} = (E - \alpha A^2)x_n + \alpha Ay, \quad x_0 = 0. \tag{2}$$

Обычно правая часть уравнения известна с некоторой точностью δ, то есть y_δ, для которой $\|y-y_\delta\|\le\delta$, поэтому вместо (2) приходится рассматривать приближения

$$x_{n+1,\delta}=(E-\alpha A^2)x_{n,\delta}+\alpha Ay_\delta,\ x_{0,\delta}=0. \tag{3}$$

2. Сходимость метода при точной правой части уравнения

Изучим сходимость метода (3) в энергетической норме гильбертова пространства $\|x\|_A=\sqrt{(Ax,x)},\ x\in H$. При этом, как обычно, число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ. Полагаем, что $x_{0,\delta}=0$ и рассмотрим разность

$$x-x_{n,\delta}=(x-x_n)+(x_n-x_{n,\delta}). \tag{4}$$

По индукции нетрудно показать, что $x-x_n=A^{-1}(E-\alpha A^2)^n y= =(E-\alpha A^2)^n x$. В исходной норме гильбертова пространства $x-x_n$ оказывается бесконечно малым при $n\to\infty$, но скорость сходимости при этом может быть сколь угодно малой, и для ее оценки нужно дополнительное требование на гладкость точного решения x, то есть $x=A^s z, s>0$. При использовании энергетической нормы, нам это дополнительное предположение не потребуется.

Действительно, с помощью интегрального представления само-сопряженного оператора получим:

$$\|x-x_n\|_A^2=(A(x-x_n),(x-x_n))=(A(E-\alpha A^2)^n x,(E-\alpha A^2)^n x)= =\int_0^M\lambda(1-\alpha\lambda^2)^{2n}d(E_\lambda x,x),$$ где

$M=\|A\|$, E_λ – соответствующая спектральная функция, E – единичный оператор.

Для оценки интересующей нас функции найдем максимум подынтегральной функции $f(\lambda)=\lambda(1-\alpha\lambda^2)^{2n}$ при $\lambda\in[0,M]$. Функция $f(\lambda)$ – частный случай при $s=1$ функции, оцененной в [1,2]. Поэтому при условии

$$0<\alpha\le\frac{5}{4M^2} \tag{5}$$

справедлива следующая оценка $\max\limits_{\lambda\in[0,M]}|f(\lambda)|\le(4n\alpha e)^{-1/2}$. Следовательно, $\|x-x_{n,\delta}\|_A\le(4n\alpha e)^{-1/4}\|x\|$. Таким образом, переход к энергетической норме как бы заменяет предположение об истокопредставимости порядка $s=1/4$ для точного решения.

3.Сходимость метода при приближенной правой части уравнения

Оценим второе слагаемое в (4). Справедливо равенство

$$x-x_{n,\delta}=A^{-1}\left[E-\left(E-\alpha A^2\right)^n\right](y-y_\delta).$$

Отсюда $\|x-x_{n,\delta}\|_A^2=\int_0^M\lambda^{-1}\left[1-\left(1-\alpha\lambda^2\right)^n\right]^2 d(E_\lambda(y-y_\delta),y-y_\delta)$.

Обозначим через $g_n(\lambda)$ подынтегральную функцию и оценим ее сверху. По индукции можно доказать, что при выполнении (5)

$$g_n(\alpha)\le\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}}4n^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}\delta^2, n\ge1,\quad g_n(\alpha)\le4n^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}\delta^2, n\ge2.$$

Нетрудно доказать, что $\max\limits_{\lambda\in[0,M]} g_n(\alpha)$ имеет при $n\to\infty$ порядок $n^{1/2}$, поэтому найденная оценка для $g_n(\lambda)$ верна по порядку. Значит, при условии (5)

$$\|x_n - x_{n,\delta}\|_A \le \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{4}} 2n^{\frac{1}{4}}\alpha^{\frac{1}{4}}\delta, n\ge 1, \qquad \|x_n - x_{n,\delta}\|_A \le 2n^{\frac{1}{4}}\alpha^{\frac{1}{4}}\delta\ , n\ge 2.$$

Так как $\|x - x_{n,\delta}\|_A \le \|x - x_n\|_A + \|x_n - x_{n,\delta}\|_A \le \|x - x_n\|_A + 2n^{\frac{1}{4}}\alpha^{\frac{1}{4}}\delta, n\ge 2$ и $\|x - x_n\|_A \to 0, n\to 0,$ то для сходимости $\|x - x_{n,\delta}\|_A \to 0, n\to\infty,$ достаточно, чтобы $n^{1/4}\delta \to 0,\ n\to\infty,\ \delta\to 0.$ В этом случае метод (3) обеспечивает сходимость последовательности приближений к точному решению в энергетической норме гильбертова пространства H. Итак, доказана

Теорема 1. Итерационный процесс (3) при условии (5) сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций n выбирать так, чтобы $n^{1/4}\delta \to 0, n\to\infty,\ \delta\to 0.$

Запишем теперь общую оценку погрешности для метода (3)

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \le \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{4}} 2n^{\frac{1}{4}}\alpha^{\frac{1}{4}}\delta + (4n\alpha e)^{-\frac{1}{4}}\|x\|,\ n\ge 1, \tag{6}$$

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \le 2n^{\frac{1}{4}}\alpha^{\frac{1}{4}}\delta + (4n\alpha e)^{-\frac{1}{4}}\|x\|,\ n\ge 2. \tag{7}$$

Оптимизируем полученную оценку (7) по n, то есть при заданном δ найдем такое значение числа итераций n, при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв нулю производную по n от правой части неравенства (7), получим

$$n_{опт} = 2^{-3}\alpha^{-1}e^{-1/2}\delta^{-1}\|x\|. \tag{8}$$

В результате подстановки $n_{опт}$ в (7) имеем

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A^{опт} \le 2^{1/8}e^{-1/8}\delta^{1/2}\|x\|^{1/2},\quad n\ge 2. \tag{9}$$

Оптимальная оценка погрешности не зависит от α, но $n_{опт}$ зависит от α, поэтому для уменьшения $n_{опт}$, то есть числа итераций, необходимых для достижения оптимальной точности, следует брать α возможно большим, удовлетворяющим условию (5), и так, чтобы $n_{опт}$ было целым. Таким образом, доказана

Теорема 2. При условии (5) оптимальная оценка погрешности для итерационного процесса (3) в энергетической норме гильбертова пространства имеет вид (9) и получается при $n_{опт}$ из (8).

Литература

1.Константинова Я.В., Лисковец О.А. Оценки погрешности в методе итераций для уравнений 1-го рода //Вестник Белорусского университета. Сер.1.–1973.–№1.–С.9–15.
2.Лисковец О.А., Савчук В.Ф. Метод простых итераций с попеременно-чередующимся шагом для уравнения I рода //Доклады АН БССР.– Т.XXI. –1977. –№1. –С.9–12.